

参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	C	A	B	B	C

二、多选题选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

题号	9	10	11	12
答案	ACD	BD	AC	BD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

13. -2 14. $-x^2 + 2x$ 15. $1100; \frac{2}{5}$ 16. $\frac{3}{8}V$

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分.

17. (本小题满分 10 分)

解：因为 $A = \frac{\pi}{3}$ ，由余弦定理可得 $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$ ，即 $c^2 + b^2 - bc = 3$.

选①时，因为 $BD = CD$ ，所以 $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ ，

平方可得 $2 = \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + 2bc \cos A)$ ，即 $c^2 + b^2 + bc = 8$ ，

所以 $c^2 + b^2 = \frac{11}{2}$ ， $bc = \frac{5}{2}$ ，所以 $b + c = \sqrt{c^2 + b^2 + 2bc} = \frac{\sqrt{42}}{2}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $\frac{\sqrt{42}}{2} + \sqrt{3}$.

选②时，因为 AD 平分 $\angle BAC$ ，所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$ ，

即 $\frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6}$ ，化简得 $\sqrt{3}bc = \frac{3}{2}(b + c)$ ，

又因为 $c^2 + b^2 - bc = 3$ ，即 $(c + b)^2 - 3bc = 3$ ，

所以 $(b + c)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}(b + c) = 3$ ，解得 $b + c = 2\sqrt{3}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3\sqrt{3}$.

选③时，因为 $AD \perp BC$ ，所以 $\frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}ah$ ，解得 $bc = 4$ ，所以 $c^2 + b^2 = 7$ ，

因为 $c^2 + b^2 \geq 2bc = 8$ ，不成立.

所以不存在 $\triangle ABC$.

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 令 $n=5$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{35}{5} = 7$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{45}{5} = 9$,

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y} = 287 - 5 \times 7 \times 9 = -28, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 = 295 - 5 \times 7^2 = 50,$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{-28}{50} = -0.56, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 9 - (-0.56) \times 7 = 12.92,$$

$$\text{所以 } \hat{y} = -0.56x + 12.92.$$

(2) 由 $\hat{b} = -0.56 < 0$ 知 y 与 x 之间是负相关.

将 $x=6$ 代入回归方程, 可预测该店当日的销售量 $\hat{y} = -0.56x + 12.92 = 9.56$ (千克).

(3) 由 (1) 知 $\mu = \bar{x} = 7$,

$$\text{由 } \sigma^2 = s^2 = \frac{1}{5} [(2-7)^2 + (5-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2 + (11-7)^2] = 10, \text{ 得 } \sigma = 3.2,$$

$$\text{所以 } P(3.8 < X < 13.4) = P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$$

$$= P(\mu - \sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$$

$$= \frac{1}{2} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) + \frac{1}{2} P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.8185.$$

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 因为 $2S_n = n(a_n + 1)$ ①, 所以 $2S_{n-1} = (n-1)(a_{n-1} + 1)$ ($n \geq 2$) ②,

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } (n-2)a_n - (n-1)a_{n-1} + 1 = 0 \quad (n \geq 2) \quad \text{③},$$

$$\text{所以 } (n-3)a_{n-1} - (n-2)a_{n-2} + 1 = 0 \quad (n \geq 3) \quad \text{④},$$

$$\text{③} - \text{④} \text{ 得 } (n-2)a_n - 2(n-2)a_{n-1} + (n-2)a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3),$$

所以 $a_n + a_{n-2} = 2a_{n-1}$ ($n \geq 3$), 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列,

又 $a_1 = 1, a_2 = 4$, 故公差 $d = 4 - 1 = 3$,

$$\text{所以 } a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$(2) \text{ 若 } 3^m < a_n < 9^m, \text{ 则 } 3^m < 3n - 2 < 9^m, \text{ 即 } 3^{m-1} + \frac{2}{3} < n < 3^{2m-1} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{又 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以 } 3^{m-1} + 1 \leq n \leq 3^{2m-1}, \text{ 所以 } b_m = 3^{2m-1} - 3^{m-1}.$$

$$\text{于是 } T_m = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m = (3 + 3^3 + 3^5 + \cdots + 3^{2m-1}) - (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{m-1})$$

$$= \frac{3(1-9^m)}{1-9} - \frac{1-3^m}{1-3} = \frac{3^{2m+1} - 4 \cdot 3^m + 1}{8}.$$

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 因为 $2a = 8$, 所以 $a = 4$, 又 $\overline{PM} = 2\overline{MF}$, 所以 $\frac{a^2}{c} - a = 2(a - c)$,

$$\text{所以 } c = 2, b^2 = 12, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

(2) ① 当 AB 的斜率为 0 时, 显然 $k_1 = k_2 = 0, k_1 + k_2 = 0$.

当 AB 的斜率不为 0 时, 设 $AB: x = my - 8$,

$$\text{由} \begin{cases} x = my - 8, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1, \end{cases} \text{得 } (3m^2 + 4)y^2 - 48my + 144 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 故有 } y_1 + y_2 = \frac{48m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{144}{3m^2 + 4},$$

$$\text{所以 } k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1}{my_1 - 6} + \frac{y_2}{my_2 - 6} = \frac{y_1(my_2 - 6) + y_2(my_1 - 6)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}.$$

$$\text{因为 } y_1(my_2 - 6) + y_2(my_1 - 6) = 2my_1 y_2 - 6(y_1 + y_2) = 0, \text{ 所以 } k_1 + k_2 = 0.$$

综上所述, 恒有 $k_1 + k_2 = 0$ 为定值.

$$\textcircled{2} S_{\triangle ABF} = S_{\triangle PBF} - S_{\triangle PAF} = \frac{1}{2} \cdot |PF| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{72\sqrt{m^2 - 4}}{3m^2 + 4},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABF} = \frac{72\sqrt{m^2 - 4}}{3m^2 + 4} = \frac{72\sqrt{m^2 - 4}}{3(m^2 - 4) + 16} = \frac{72}{3\sqrt{m^2 - 4} + \frac{16}{\sqrt{m^2 - 4}}} \leq \frac{72}{2\sqrt{48}} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{当且仅当 } 3\sqrt{m^2 - 4} = \frac{16}{\sqrt{m^2 - 4}}, \text{ 即 } m = \pm \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ 时取等号 (此时适合 } \Delta > 0 \text{),}$$

所以 $\triangle ABF$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$.

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 连接 B_1P, OP, A_1P , 易证 $OP \parallel AD$,

又因为 $AD \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $OP \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

因为 $PA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $OP \perp PA_1$.

在矩形 ABB_1A_1 中, 由相似计算可得 $PB_1 \perp PA_1$,

所以 $PA_1 \perp$ 平面 PB_1O , 可得 $OB_1 \perp PA_1$.

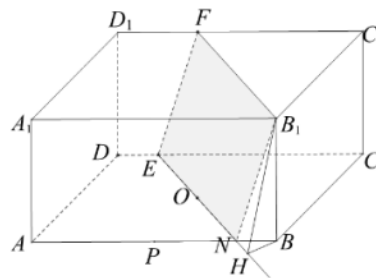
(2) 由题意知, 该截面为平行四边形 $NEFB_1$,

如右图所示: 底面 $ABCD$ 中, 过 B 作 EN 的垂线, 垂足为 H ,

因为 $BB_1 \perp EN$, $BH \perp EN$,

所以 $EN \perp$ 平面 BB_1H , 可得 $B_1H \perp EN$,

所以 $S_{NEFB_1} = B_1H \cdot EN$.



$$\text{设 } \angle ENP = \alpha \left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right), \text{ 则 } NO = \frac{2}{\sin \alpha}, NP = \frac{2}{\tan \alpha}, \text{ 可得 } NB = 2 - \frac{2}{\tan \alpha}.$$

$$\text{所以 } BH = NB \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha,$$

$$\text{所以 } B_1H = \sqrt{BH^2 + BB_1^2} = \sqrt{(2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 + 4} = \sqrt{8 - 8 \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形 } NEFB_1} = B_1H \cdot EN = \frac{4}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{8 - 8 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

$$\text{令 } f(\alpha) = S^2 = \frac{128(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{128(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha},$$

$$= 128\left(\frac{1}{\tan^2 \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} + 1\right) = 128\left[\left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right],$$

因为 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan \alpha > 1$, 当 $\tan \alpha = 2$ 时, $f(\alpha)_{\min} = 96$,

所以过 B_1, N, O 三点的平面被长方体所截面积的最小值为 $4\sqrt{6}$.

22. (本小题满分 12 分)

解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x - x^2$, $f'(x) = e^x - 2x$,

设 $g(x) = f'(x) = e^x - 2x$, 则 $g'(x) = e^x - 2$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$,
所以 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > \frac{1}{2}$, 即 $f'(x) > \frac{1}{2}$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 图象上任意一点处的切线斜率均大于 $\frac{1}{2}$.

(2) 先证对任意 $x \in [0, +\infty)$, $\ln(x+1) \leq x$, $e^x \geq x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

令 $h(x) = \ln(x+1) - x$, $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$. 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) \leq h(0) = 0$, 所以 $\ln(x+1) \leq x$.

令 $p(x) = e^x - x^2 - \frac{1}{2}x - 1$, $p'(x) = e^x - 2x - \frac{1}{2} = m(x)$, $m'(x) = e^x - 2$.

令 $m'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$,

所以 $m(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $m(x) \geq m(\ln 2) > 0$, 所以 $p'(x) > 0$, 所以 $p(x)$ 单调递增,

所以 $p(x) \geq p(0) = 0$, 所以 $e^x \geq x^2 + \frac{1}{2}x + 1, x \in [0, +\infty)$.

因为 $f(x) > \frac{1}{2}\ln(x+1) + \cos x$ 对于任意的 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $f(0) > \frac{1}{2}\ln(0+1) + \cos 0$, 得 $a > 1$.

当 $a > 1$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \cos x &= ae^x - x^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \cos x > e^x - x^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \cos x \\ &\geq x^2 + \frac{1}{2}x + 1 - x^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \cos x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + 1 - \cos x \\ &\geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + 1 - \cos x = 1 - \cos x \geq 0, \end{aligned}$$

即 $f(x) > \frac{1}{2}\ln(x+1) + \cos x$ 对于任意的 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立.

综上所述, $a > 1$.